Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului

Olimpiada Naţională de Matematică 2008

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

1 martie 2008

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că $|a_{n+1}-a_n|\leq 1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin

$$b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Să se arate că $|b_{n+1}-b_n|\leq \frac{1}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul 2. Fie mulţimea $A=\{1,2,\ldots,n\}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6$. Să se arate că A este reuniunea a trei mulţimi, disjuncte două câte două, cu acelaşi cardinal şi aceeaşi sumă a elementelor lor, dacă şi numai dacă n este multiplu de 3.

Subiectul 3. Să se arate că dacă $n\geq 4$, $n\in\mathbb{N}$ şi $\left[\dfrac{2^n}{n}\right]$ este o putere a lui 2, atunci n este o putere a lui 2.

Subiectul 4. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Se notează cu P punctul de intersecţie a dreptelor AD şi BC, şi cu Q punctul de intersecţie a dreptelor AB şi CD. Fie E al patrulea vârf al paralelogramului $ABCE$ şi F intersecţia dreptelor CE şi PQ. Să se demonstreze că punctele D, E, F şi Q sunt conciclice (aparţin aceluiaşi cerc).

Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii